Serie 3

1. Betrachten Sie die zwei Teilräume

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

und

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \text{ und } -1 \leq x \leq 1\}$$

von $\mathbb{R}^2$. Wir versehen $\mathbb{R}^2$ mit der Standardtopologie und X und Y mit der Teilraumtopologie.

a) Zeigen Sie, dass für zwei beliebige Punkte $x, y \in X$, $x \neq y$, der Raum $X \setminus \{x, y\}$ nicht zusammenhängend ist.

b) Zeigen Sie, dass es zwei Punkte $x, y \in Y$ mit $x \neq y$ gibt so, dass $Y \setminus \{x, y\}$ zusammenhängend ist.

c) Warum folgt aus Teilaufgabe a) und b), dass X und Y nicht homöomorph sind?

2. Sei $\mathbb{R}^2$ mit der Standardtopologie versehen. Betrachten Sie den Teilraum

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ und } y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ und } y = \frac{1}{x}\}$$

versehen mit der Teilraumtopologie. Ist X zusammenhängend? Ist X wegzusammenhängend?

3. Wenn $\{(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ eine Familie von zusammenhängenden topologischen Räumen ist, dann ist $\prod_{\alpha \in A} E_\alpha$ (mit der Produkttopologie) zusammenhängend.

4. Zeigen Sie, dass die zusammenhängenden Mengen in $\mathbb{R}$ genau die Intervalle sind.

5. Zeigen Sie, dass jede offene Menge in $\mathbb{R}$ die Vereinigung von abzählbar vielen disjunkten offenen Intervallen ist.

6. Ziel dieser Aufgabe ist die Konstruktion einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit überabzählbar vielen Zusammenhangskomponenten.

Die Cantor-Menge $C \subset \mathbb{R}$ ist wie folgt definiert. Sei

$$C_1 := [0,1] \quad \text{und} \quad C_n := \frac{1}{3}C_{n-1} \cup \Big(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1}\Big).$$

Nachfolgend sind C_1 bis C_7 abgebildet.

Dann ist die Cantor-Menge definiert durch

$$C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

a) Zeigen Sie, dass die Cantor-Menge abgeschlossen ist.

b) Zeigen Sie, dass die Cantor-Menge überabzählbar ist.

c) Beweisen Sie, dass jeder Punkt in C eine Zusammenhangskomponente ist.